数理解析研究所講究録 1440 巻 2005 年 127-132

頂点作用素代数 V_L^+ と モンスターの極大 2-局所部分群について

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
e-mail: shima@ms.u-tokyo.ac.jp

1 序

偶格子 L に付随する頂点作用素代数 V_L^+ は格子頂点作用素代数 V_L の格子の自己同型 -1 の持ち上げによる固定点として得られるものである．これは頂点作用素代数の自己同型による固定点として得られるオービフォールド模型の典型的な例である．また，ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の Frenkel らによる構成 ([FLM]) においてはリーチ格子 Λ に付随する V_Λ^+ が中心的な役割を果たす．したがってオービフォールド理論の確立やムーンシャイン加群の研究のためにも V_L^+ の研究は重要である．特に表現論 ([Ab1, ADL, DN2, AD]) や自己同型群 ([Sh1]) に関してよく研究がなされている．その結果 L が 2-elementary totally even という条件を満たすときに既約加群の同型類全体の集合は分岐則を積として基本可換 2-群の構造を入れることができることがわかった．よってイジング模型などの場合と同じように ([Mi1])，このような V_L^+ を部分加群として持つ VOA に対し，基本可換 2-群と同型な自己同型群を得ることが出来る.[1] 本稿では，ムーンシャイン加群の V_L^+ と同型ないくつかの部分 VOA を考えて，そこから得られる基本可換 2-群について考察する．特に，それらの中心化群や正規化群の構造を V_L^+ の自己同型を用いて記述する．

2 準備

この章では必要な定義や事実について述べる．頂点作用素代数の定義や一般論は [Bo, FHL, FLM] を参照していただきたい．

[1]一般には V_L^+ の完全加約性が必要になる．階数 1 の格子に対しては [Ab2, Ab3] にて示されているが，一般の階数に対してはまだ示されていない．

2.1 頂点作用素代数の自己同型の加群への作用

頂点作用素代数 V, その自己同型 g, V-加群 $M=(M,Y_M)$ に対して

$$Y_{M\circ g}(v,z):=Y_M(gv,z),\ v\in V$$

と定義すると $Y_{M\circ g}$ は M 上の頂点作用素となる. よって, $M\circ g=(M,Y_{M\circ g})$ は V-加群となる. これにより $\mathrm{Aut}(V)$ が V-加群の同型類全体の集合上へ作用する.

注意 2.1. V-加群 M が既約であったなら, $M\circ g$ も既約である. したがって, $\mathrm{Aut}(V)$ が既約 V-加群の同型類全体の集合へ作用する. さらに, この作用は次数付き次元と分岐則を保つ.

2.2 頂点作用素代数 V_L^+ とその性質

偶格子 L から格子頂点作用素代数 V_L が構成される. 本稿では詳しく述べないが, 具体的な構成法に関しては [FLM] の 7 章 と 8 章を参考にされたい. さらに $\lambda+L\in L^\circ/L$ に対して, 既約 V_L-加群 $V_{\lambda+L}$ が構成でき, Dong ([Do]) によって V_L の既約加群はこれらで尽くされていることが示されている. また, Dong-Nagatomo ([DN1]) によって $\mathrm{Aut}(V_L)$ が記述されている. 全ての元を -1 倍する L の自己同型の $\mathrm{Aut}(V_L)$ への持ち上げ θ を一つとる. すると θ の位数は 2 となり, V_L の θ による固定部分空間 V_L^+ と -1 固有空間 V_L^- を得る. そして V_L^+ は V_L の部分頂点作用素代数, V_L^- は V_L^+ の既約加群となっている.[2]

Dong-Nagatomo ([DN2]) によって階数 1 の場合, Abe-Dong ([AD]) によって一般の階数の場合に V_L^+ の既約加群が分類された. また, V_L^+ の分岐則は Abe ([Ab1]) によって階数 1 の場合が, Abe-Dong-Li ([ADL]) によって一般の階数の場合に完全に決定された.[3]

2.3 2 つの命題

この節では本稿において重要な役割を果たす 2 つの命題を紹介する.

V を単純な VOA, D を可換な有限自己同型群とする. $f\in\mathrm{Hom}(\mathrm{D},\mathbb{C}^\times)$ に対して $V(f)=\{v\in V|\ d(v)=f(d)v,\ d\in D\}$ とおく. また $H^C=\{g\in\mathrm{Aut}(V^D)|\ V(f)^g\cong V(f),\ f\in\mathrm{Hom}(\mathrm{D},\mathbb{C}^\times)\}$ とおく. すると, 制限によって中心化群 $C_{\mathrm{Aut}(V)}(D)$ から H^C への準同型写像 Φ^C が得られる. H^N を $\{V(f)|\ f\in\mathrm{Hom}(\mathrm{D},\mathbb{C}^\times)\}$ の同型類の集合を保つ $\mathrm{Aut}(V^D)$ の部分群とすると, 同様に制限によって正規化群 $N_{\mathrm{Aut}(V)}(D)$ から H^N への準同型写像 Φ^N が得られる.

命題 2.2. [Sh1] 準同型写像 Φ^C と Φ^N は全射であり, その核は D である.

この命題によって, もし V^D の自己同型群がよく分かっていれば, $\mathrm{Aut}(V)$ における D の中心化群, 正規化群もわかることになる.[4]

[2] -1 自己同型の持ち上げのとり方によらず V_L^+ の頂点作用素代数構造は一意である [DGH].

[3] これら V_L^+ に関する情報は [Sh1] における $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の決定に欠かせないものであった.

[4] [Sh1] では逆に $\mathrm{Aut}(V)$ を用いて V^D の自己同型群 (の部分群) を考察することで $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の自己同型群に関する重要な情報を得ていた.

次に V_L^+ の分岐則に関する命題を紹介する. 格子 L が 2-elementary とは, L の双対格子 L° が $2L^\circ \subset L$ を満たすことであり, L が totally even とは $\sqrt{2}L^\circ$ と L の両方が偶格子となることである. このような格子に対して [Ab1, ADL] で決定された V_L^+ の分岐則を計算することで, 次の命題を得る.

命題 2.3. [Ab1, ADL](cf. [Sh1]) 偶格子 L が *2-elementary totally even* であることは V_L^+ の既約加群の同型類全体が分岐則の下で基本可換 2-群の構造を持つための必要十分条件である.[5]

3 V_L^+ から得られる基本可換 2-群とその中心化群, 正規化群

この節では V_L^+ から誘導される基本可換 2-群とその正規化群, 中心化群について述べる. L を 2-elementary totally even 格子とする. 単純 VOA V が次を満たしているとする:

- V は V_L^+ と同型な部分 VOA V^0 を持ち, V を V^0-加群として既約分解したとき完全加約である.

S_L で V_L^+ の既約加群の同型類全体の集合をあらわすことにする. $V = \oplus_{W \in S_L} \mu_W W$ を V^0-加群としての既約分解とする. ただし μ_W は重複度を表す. $M(W)$ で W と同型な成分の和をあらわすことにする. 命題 2.3 から S_L は分岐則の下で基本可換 2-群の構造を持つ. この対称性を V の自己同型へ持ち上げる. すなわち $f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{S_L}, \mathbb{C}^\times)$ に対して, V の線形写像 $e_f(v) = f(W)v$, $v \in M(W)$ と定めると V の自己同型となる. よって $E_L = \{e_f | \ f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathbb{C}^\times)\}$ という V の自己同型群を得る. $\tilde{S}_L = \{W \in S_L | \ \mu_W \neq 0\}$ とおく. ここで V が次を満たすとする:

- 重複度 μ_W は有限である.

すると $M(V^0) = V^0$ であることから, V^0 は E_L の固定部分 VOA となっており, [DM] より $\tilde{S}_L$ は S_L の部分群である.[6] よって E_L は $\tilde{S}_L$ と同型である.

次に E_L の $\mathrm{Aut}(V)$ における中心化群 $C_{\mathrm{Aut}(V)}(E_L)$ を考える. 命題 2.2 より $C_{\mathrm{Aut}(V)}(E_L)/E_L$ と $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E_L)/E_L$ は $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の部分群と同型である. [Sh1] での方法を用いることで $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の計算が可能であるので, 中心化群 $C_{\mathrm{Aut}(V)}(E_L)$ と正規化群 $N_{\mathrm{Aut}(V)}(E_L)$ を計算することが可能である.

4 モンスターの極大 2-局所群

前章の方法をもちいて, ムーンシャイン加群の自己同型群における基本可換 2-群の中心化群, 正規化群を決定する. 本稿ではムーンシャイン加群 $V^\natural$ に関して次のことだけを仮定する.

---

[5]一般に分岐則は 2 つの既約加群の同型類から同型類の形式和への対応を与える. この場合は 2 つの同型類に対して唯一の同型類が対応し, その係数が 1 となる. これにより既約加群の同型類全体の集合上に積を入れると群構造をもつのである.

[6]実際にはもっと強く $\mu_W = 1$ $(W \in \tilde{S}_L)$ となる ([DM]).

- $V^\natural$ は単純 VOA である.
- $V^\natural$ は V_Λ^+ と同型な部分 VOA をもち, この部分 VOA の加群として $V^\natural \cong V_\Lambda^+ \oplus V_\Lambda^{T,-}$ となる. ただし Λ はリーチ格子とする.

L をリーチ格子の階数 24 の部分格子 L で 2-elementary totally even とする. このとき $V^\natural$ の部分 VOA V_L^+ に前章の方法を適用する. すると, V_L^+ から基本可換 2-群と同型な $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ の部分群を得, その中心化群と正規化群を $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ を用いて記述することが出来る. 本稿では正規化群が $2_+^{1+24} \cdot Conway_1$ と $2^{10+16} \cdot \Omega_{10}^+(2)$ となる場合について述べる.[7]

4.1 $2_+^{1+24} \cdot Conway_1$ の形を持つ部分群

まずは $L = \Lambda$ の場合を考える. このとき S_L は分岐則の下で $\mathbb{Z}_2^2$ の群構造を持つ. また, $V^\natural = V_\Lambda^+ \oplus V_\Lambda^{T,-}$ が V_L^+-加群として既約分解となっている. したがって $\tilde{S}_L$ は $\mathbb{Z}_2$ となっており $E_L \cong \mathbb{Z}_2$ である. 具体的には V_Λ^+ 上 1, $V_\Lambda^{T,-}$ 上 -1 と作用する自己同型が E_L の生成元である. この $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ のおける中心化群 (正規化群) を求めよう. [Sh1] において $\mathrm{Aut}(V_\Lambda^+) \cong 2^{24}.Conway_1$ であることが示されている. さらに $\mathrm{Aut}(V_\Lambda^+)$ は V_Λ^+ の既約加群の同型類をそれぞれ保つ. したがって $C_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(E_L)/E_L \cong \mathrm{Aut}(V_\Lambda^+)$ となる. 以上のことから $C_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(E_L) \cong 2.2^{24}.Conway_1$ を得る.

4.2 $2^{10+16} \cdot Conway_1$ の形を持つ部分群

次に Λ の部分格子 $L = \sqrt{2}E_8 \oplus \Lambda_{16}$ を考える. ただし Λ_{16} は階数 16 の Barnes-Wall 格子である. そして, $V^\natural$ の部分 VOA $V = V_{\sqrt{2}E_8}^+ \otimes V_{\Lambda_{16}}^+$ を考える. 少し記号の乱用になるが, V の既約加群の同型類を S_L と書き, $V^\natural$ の V-既約加群としての分解に現れる S_L の部分集合を $\tilde{S}_L$ と書くことにする. このとき S_L は分岐則の下で $\mathbb{Z}_2^{20}$ の群構造を持ち, $\tilde{S}_L$ は $\mathbb{Z}_2^{10}$ と同型な部分群となっている. よって $E_L \cong \mathbb{Z}_2^{10}$ を得る.

まずは $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ と $V_{\Lambda_{16}}^+$ の自己同型群に関して思い出す. $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ と $V_{\Lambda_{16}}^+$ はそれぞれ 2^{10} 個の既約加群の同型類を持つ. $\sqrt{2}E_8$ と Λ_{16} は 2-elementary totally even であるので, $S_{\sqrt{2}E_8}$ と $S_{\Lambda_{16}}$ は分岐則を下に $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間の構造をもつ. さらに, その上に自己同型の作用で保たれる非退化な symplectic 形式に付随するプラス型の二次形式を定義できる.[8] そして自己同型群はこの形式を保つ直交群として記述され, $\mathrm{Aut}(V_{\sqrt{2}E_8}^+) \cong O_{10}^+(2)$ ([Gr, Sh1]), $\mathrm{Aut}(V_{\Lambda_{16}}^+) \cong 2^{16} \cdot \Omega_{10}^+(2)$ ([Sh1]) となる. そして, 計算により $\mathrm{Aut}(V_{\sqrt{2}E_8}^+ \otimes V_{\Lambda_{16}}^+) \cong O_{10}^+(2) \times 2^{16} \cdot \Omega_{10}^+(2)$ となることがわかる.

さて, 中心化群を求めよう. そのために $\mathrm{Aut}(V_{\sqrt{2}E_8}^+ \otimes V_{\Lambda_{16}}^+)$ の $\tilde{S}_L$ の全ての元を保つ部分群 H^C を求める. S_L の元は $W_1 \otimes W_2$, $(W_1 \in S_{\sqrt{2}E_8}, W_2 \in S_{\Lambda_{16}})$ の形をしており, $\tilde{S}_L$ に

[7] 前章の方法を V_Λ^+ の部分 VOA V_L^+ に用いると, E_L には V_Λ^+ 上 1, $V_\Lambda^{T,-}$ 上 -1 と作用するモンスターの $2B$ に属する元が属する. 極大 2-局所部分群は同型を除いて 7 つあり, そのうち 5 つの群の中心が $2B$ 元を含む. [Sh2] では, 特にこれら 5 つの群を対応する V_L^+ を用いて記述している.

[8] 具体的な写像は, 既約加群の同型類の次数つき次元が $\mathbb{Z}[[q]]$ に入るときに 0, $\mathbb{Z}q^{1/2}[[q]]$ に入るときに 1 によって与えられる.

は $S_{\sqrt{2}E_8}$ と $S_{\Lambda_{16}}$ の元がそれぞれ丁度一回ずつ現れている．したがって H^C は $\mathrm{Aut}(V^+_{\sqrt{2}E_8})$ の $S_{\sqrt{2}E_8}$ の全ての元を保つ部分群と $\mathrm{Aut}(V^+_{\Lambda_{16}})$ の $S_{\Lambda_{16}}$ の全ての元を保つ部分群との直積, すなわち $H^C \cong 2^{16}$ となる．よって, 命題 2.2 より $C_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(E_L)/E_L \cong 2^{16}$ となる．したがって $C_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(E_L) \cong 2^{10+16}$ となる．

次に正規化群を求めよう．そのために $\mathrm{Aut}(V^+_{\sqrt{2}E_8} \oplus V^+_{\Lambda_{16}})$ の $\tilde{S}_L$ を保つ部分群 H^N を求める．H^N から元 (g_1, g_2) をとってこよう．ただし $g_1 \in \mathrm{Aut}(V^+_{\sqrt{2}E_8})$, $g_2 \in \mathrm{Aut}(V^+_{\Lambda_{16}})$ である．上で述べたように S_L の元として現われる $S_{\sqrt{2}E_8}$ と $S_{\Lambda_{16}}$ の元のペアはそれらの間の一対一対応を与えているので g_2 が決まると自動的に g_1 も決まってしまう．したがって $H_N \cong 2^{16} \cdot \Omega^+_{10}(2)$. よって, 命題 2.2 より $N_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(E_L)/E_L \cong 2^{16} \cdot \Omega^+_{10}(2)$ となる．したがって $N_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(E_L) \cong 2^{10+16}.\Omega^+_{10}(2)$ となる．

5 最後に

今まで述べた方法を用いることで 5 つのモンスターの極大 2-局所群に対応する $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ の部分群を V_L^+ の言葉で記述することが出来る．では, これらの部分群が実際に $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ を生成してモンスターと同型になることを証明できるだろうか．それは宮本雅彦氏の論文 [Mi2] において $V^\natural$ の再構成後にその自己同型群がモンスターとなることを示している論法を用いることで可能であると思われる．すなわち $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ が単純群であることを示し, モンスターアマルガムを成す $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ の部分群を見つけ出し $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ とモンスターとの同型をいうのである．実際にモンスターアマルガムをなす 3 つの部分群は本稿の方法で捉えられる極大 2-局所部分群である．今後はこの方針で研究を進め, V_L^+ を用いてさらにモンスターの性質を記述したい．

参考文献

[Ab1] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra*, **242** (2001), 624–655.

[Ab2] T. Abe, The charge conjugation orbifold $V^+_{\mathbb{Z}\alpha}$ is rational when $\langle\alpha,\alpha\rangle/2$ is prime, *Int. Math. Res. Not.* **12** (2002), 647–665.

[Ab3] T. Abe, Rationality of the vertex operator algbera V_L^+ for a positive definite even lattice, to appear in *Math. Z.*

[AD] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+: General case, *J. Algebra*, **273** (2004), 657–685.

[ADL] T. Abe, C. Dong and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebras $M(1)^+$ and V_L^+, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[Bo] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A,* **83** (1986), 3068–3071.

[Do] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.

[DGH] C. Dong, R.L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DM] C. Dong and G. Mason, On quantum Galois theory, *Duke Math. J.* **86** (1997), 305–321.

[DN1] C. Dong and K. Nagatomo, Automorphism groups and twisted modules for lattice vertex operator algebras, *Comtemp. Math.* **248** (1999), 117–133

[DN2] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169–195.

[FHL] I. Frenkel, Y. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules. Mem. Amer. Math. Soc. 104 1993.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1989.

[Gr] R.L. Griess, The vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $O^+(10,2)$, *The Monster and Lie algebras, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ* **7** (1998), 43–58.

[Mi1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebra, *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[Mi2] M. Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596

[Sh1] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Sh2] H. Shimakura, On five maximal 2-local subgroups of the Monster and vertex operator subalgebras of the Moonshine module, preprint.